

Valintakoe A 2026

Ratkaisut

Eriytyvän syventävän osion matematiikan tehtävät

C1 Matematiikan tehtävä.

C1.1 Vastaus on n. 1362 euroa.

Perustelu: Tarvittava pääoma saadaan diskonttaamalla 1., 2. ja 3. vuoden päästä maksettavat stipendit korkokertoimella $q = 1,05$. Täten sijoitettavan pääoman on oltava

$$K = 500q^{-1} + 500q^{-2} + 500q^{-3} = 1361,624 \dots$$

Pisteytyksen suuntalinjat: Korkokerroin 1 p. Oikean lausekkeen tai yhtälön muodostaminen 3 p. Vastaus +1 p. Plusmerkki pisteen edessä tarkoittaa sitä, että tämän pisteen voi saada vain mikäli edellinen kohta on kunnossa. Pelkästä oikeasta vastauksesta ilman perusteluja ei saa pisteitä.

C1.2 Vastaus on 90° .

Perustelu: Pisteestä B pisteeseen A piirretty vektori on $\overrightarrow{BA} = \overline{i} + 2\overline{j} - (4\overline{i} + \overline{j}) = -3\overline{i} + \overline{j}$, ja vastaavasti pisteestä B pisteeseen C piirretty vektori on $\overrightarrow{BC} = 5\overline{i} + 4\overline{j} - (4\overline{i} + \overline{j}) = \overline{i} + 3\overline{j}$. Näiden pistetulo on $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-3\overline{i} + \overline{j}) \cdot (\overline{i} + 3\overline{j}) = -3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 0$, joten kolmion kyljet BA ja BC ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Täten kysytty kulma on 90° .

Pisteytyksen suuntalinjat: Tehtävän voi ratkaista lukuisilla eri tavoilla ja tässä on esitetty yllä olevan ratkaisun pisteytyksen suuntaviivat. Muodostetut vektorit ovat oikein 2 p. Pistetulo on oikein 1p. Tulkittu saatu pistetulo kulmaksi ja annettu vastaus pyydytyssä muodossa asteina asteen tarkkuudella +2 p.

C1.3 Mahdollinen vastaus: $a = 2$, $b = \frac{12\pi}{149}$, $c = -\frac{245\pi}{298}$ ja $d = 6$, jolloin

$$h(t) = 2 \sin \left(\frac{12\pi}{149}t - \frac{245\pi}{298} \right) + 6.$$

Perustelu: Vakiot eivät määrydy yksikäsitteisesti, vaan riippuvat vakion a merkin valinnasta, sekä kohdasta, jossa tarkastellaan sinifunktion minimiarvoa ja sitä seuraavaa maksimiarvoa. Tässä esimerkkiratkaisussa sinifunktion pienin arvo -1 valitaan kiinnitettäväksi kohtaan $-\frac{\pi}{2}$ jolloin seuraavan maksimiarvon 1 kohta on $\frac{\pi}{2}$.

Tässä esimerkkiratkaisussa valitaan myös $a > 0$, jolloin veden korkein kohta on $8 = a \cdot 1 + d$ ja matalin kohta $4 = a \cdot (-1) + d$. Näin saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a + d = 8 \\ -a + d = 4. \end{cases}$$

Vähentämällä ylemmästä yhtälöstä alempi saadaan $2a = 4$, josta $a = 2$. Sijoittamalla tämä ylempään yhtälöön saadaan $d = 6$.

Korkeuden minimi- ja maksimiarvoa vastaavat ajankohdat ovat klo 4.00 ja 16.25, mikä merkitsee $16 + \frac{25}{60} = \frac{197}{12}$ tuntia. Näistä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} b \cdot 4 + c = -\frac{\pi}{2} \\ b \cdot \frac{197}{12} + c = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Vähentämällä ylempi yhtälö alemmasta saadaan $b \cdot \frac{149}{12} = \pi$, josta $b = \frac{12\pi}{149}$. Sijoittamalla tämä ensimmäiseen yhtälöön saadaan ratkaistua $c = -\frac{245\pi}{298}$.

Pisteytyksen suuntalinjat: Vakioiden a ja b ratkaiseminen 2 p. Lineaarisen yhtälöryhmän muodostaminen vakioille b ja c tai lausekkeiden muodostaminen näille vakioille 2 p. Vakioiden b ja c ratkaiseminen +1 p.

C2 Matematiikan tehtävä.

C2.1 Mallivastaus: Koska

$$b(t) = b(0) e^{kt},$$

on

$$b'(t) = b(0) e^{kt} \cdot k = k \cdot b(t),$$

mistä nähdään, että määrän muutosnopeus $b'(t)$ on verrannollinen määrään $b(t)$ kaikilla t :n arvoilla. Verrannollisuuskertoimen on k .

Pisteytyksen suuntalinjat: Derivointi 3 p (sisäfunktion derivaatta, ulkofunktion derivaatta ja kokonaisuus oikein). Verrannollisuus 2 p (oikea periaate sekä oikea verrannollisuuskertoimen).

C2.2 Mallivastaus:

$$b(t + T) = 2b(t) \Leftrightarrow b(0) e^{k(t+T)} = 2b(0) e^{kt} \Leftrightarrow b(0) e^{kt} e^{kT} = 2b(0) e^{kt} \Leftrightarrow b(0) e^{kT} = 2b(0).$$

Jos $b(0) = 0$, on kaikilla ajanhetkillä $b(t) = 0$ ja silloin kahdentumisajaksi voidaan valita mikä hyvänsä luku, esim. $T = k$.

Jos taas $b(0) \neq 0$, saadaan jakamalla

$$e^{kT} = 2 \Leftrightarrow kT = \ln 2 \Leftrightarrow T = \frac{\ln 2}{k}.$$

Kahdentumisaika T ei siis riipu ajanhetkestä t .

Pisteytyksen suuntalinjat: Sijoitettu sekä $b(t + T)$ ja $2b(t)$ oikein 2 p. Saatu muokattua yhtälö muotoon $e^{kT} = 2$, +2 p. Ratkaistu T oikein +1 p.

C2.3 Mallivastaus: Jos $b(0) = 0$, on $b(t) = 0$ kaikilla ajanhetkillä ja vakiofunktion 0 keskiarvo yli minkä hyvänsä välin on 0.

Jos $b(0) \neq 0$, on

$$\frac{1}{T} \int_0^T b(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T b(0) e^{kt} dt = \frac{b(0)}{T} \int_0^T \frac{1}{k} e^{kt} = \frac{b(0)}{kT} (e^{kT} - e^0) = \frac{b(0)}{\ln 2} (e^{\ln 2} - 1) = \frac{b(0)}{\ln 2}.$$

Kysytty keskiarvo ei siis riipu vakiosta k .

Pisteytyksen suuntalinjat: Integraalifunktio 2 p. Määrätyn integraalissa rajojen sijoitus +1 p. Lausekkeen sievennys +1 p. Vastattu kysymykseen keskiarvon riippumisesta vakiosta k +1 p.