Urvalsprov A 2026
Lösningar

Den fördjupade differentierade delen i matematik

C1 Uppgift i matematik.

C1.1 Svaret är ca 1362 euro.

Motivering: Det nödvändiga kapitalet fås genom att diskontera stipendierna som betalas ut efter 1, 2 och 3 år med räntekoefficienten $q = 1{,}05$. Det investerade kapitalet behöver alltså vara

$$K = 500q^{-1} + 500q^{-2} + 500q^{-3} = 1361{,}624\ldots.$$

Riktlinjer för bedömningen: Räntefaktor 1 p. Uppställning av korrekt uttryck eller ekvation 3 p. Svar +1 p. Plustecknet framför poängen betyder att poängen kan erhållas endast om föregående del är korrekt. Enbart rätt svar utan motiveringar ger inga poäng.

C1.2 Svaret är $90\,^\circ$.

Motivering: Vektorn från punkten B till punkten A är $\overline{BA} = \bar{i} + 2\bar{j} - (4\bar{i} + \bar{j}) = -3\bar{i} + \bar{j}$. På motsvarande sätt är vektorn från B till C lika med $\overline{BC} = 5\bar{i} + 4\bar{j} - (4\bar{i} + \bar{j}) = \bar{i} + 3\bar{j}$. Dessa vektorers skalärprodukt är $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = (-3\bar{i} + \bar{j}) \cdot (\bar{i} + 3\bar{j}) = -3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 0$, så triangelns sidor BA och BC ligger vinkelrätt mot varandra. Den sökta vinkeln är alltså $90\,^\circ$.

Riktlinjer för bedömningen: Uppgiften kan lösas på många olika sätt, och nedan ges bedömningsanvisningar för lösningen ovan. Vektorerna har bildats korrekt 2 p. Skalärprodukten är korrekt 1 p. Den erhållna skalärprodukten har tolkats som en vinkel och svaret har angetts i den efterfrågade formen i grader med en grads noggrannhet +2 p.

C1.3 Ett möjligt svar: $a = 2$, $b = \dfrac{12\pi}{149}$, $c = -\dfrac{245\pi}{298}$ och $d = 6$, vilket ger

$$h(t) = 2\sin\left(\frac{12\pi}{149}t - \frac{245\pi}{298}\right) + 6.$$

Motivering: Konstanterna är inte entydigt bestämda, utan de beror på hur man väljer tecknet på a och vilken av sinusfunktionens minimipunkt man väljer. I den här modellösningen använder vi att sinusfunktionens minsta värde -1 tas i punkten $-\dfrac{\pi}{2}$, vilket leder till att sinusfunktionen tar sitt följande maximala värde 1 i punkten $\dfrac{\pi}{2}$.

Vi väljer också $a > 0$, och får att vattnets högsta nivå är $8 = a \cdot 1 + d$, medan dess lägsta nivå är $4 = a \cdot (-1) + d$. Då fås ekvationssystemet

$$\begin{cases} a + d &= 8 \\ -a + d &= 4. \end{cases}$$

Genom att subtrahera den andra ekvationen från den första fås att $2a = 4$, dvs. $a = 2$. Genom att sätta in detta värde på a i den första ekvationen fås $d = 6$.

Tidpunkterna som svarar mot de lägsta respektive högsta vattennivåerna är 4.00 och 16.25, där den senare betyder $16 + \frac{25}{60} = \frac{197}{12}$ timmar. De här bildar ekvationssystemet

$$\begin{cases} b \cdot 4 + c &= -\frac{\pi}{2} \\ b \cdot \frac{197}{12} + c &= \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Genom att subtrahera den första ekvationen från den andra får vi $b \cdot \frac{149}{12} = \pi$, vilket ger $b = \frac{12\pi}{149}$. Genom att sätta in det här i den första ekvationen fås sedan slutligen $c = -\frac{245\pi}{298}$.

Riktlinjer för bedömningen: Bestämning av konstanterna a och b 2 p. Uppställning av ett linjärt ekvationssystem för konstanterna b och c eller formulering av uttryck för dessa konstanter 2 p. Bestämning av konstanterna b och c +1 p.

C2 Uppgift i matematik.

C2.1 Modellösning: Eftersom

$$b(t) = b(0)\, e^{kt},$$

så fås att

$$b'(t) = b(0)\, e^{kt} \cdot k = k \cdot b(t),$$

vilket visar att förändringshastigheten $b'(t)$ är direkt proportionell mot antalet $b(t)$ för alla värden på t, med proportionalitetskonstant k.

Riktlinjer för bedömningen: Derivering 3 p (den inre funktionens derivata, den yttre funktionens derivata och helheten korrekt). Proportionalitet 2 p (korrekt princip samt korrekt proportionalitetskoefficient).

C2.2 Modellösning:

$$b(t+T) = 2\, b(t) \Leftrightarrow b(0)\, e^{k(t+T)} = 2\, b(0)\, e^{kt} \Leftrightarrow b(0)\, e^{kt} e^{kT} = 2\, b(0)\, e^{kt} \Leftrightarrow b(0)\, e^{kT} = 2b(0).$$

Om $b(0) = 0$, så gäller för alla t att $b(t) = 0$, och då kan man välja vilket tal som helst till fördubblingstid, t.ex. $T = k$.

Ifall att $b(0) \neq 0$, så fås genom division att

$$e^{kT} = 2 \Leftrightarrow kT = \ln 2 \Leftrightarrow T = \frac{\ln 2}{k}.$$

Fördubblingstiden T beror alltså inte av tidpunkten t.

Riktlinjer för bedömningen: Både $b(t+T)$ och $2b(t)$ har satts in korrekt 2 p. Ekvationen har omformats till formen $e^{kT} = 2$, +2 p. T har bestämts korrekt +1 p.

C2.3 Modellösning: Genom en direkt uträkning fås

$$\frac{1}{T}\int_0^T b(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T b(0)\, e^{kt}\, dt = \frac{b(0)}{T} \Big/_{0}^{T} \frac{1}{k}\, e^{kt} = \frac{b(0)}{kT}\left(e^{kT} - e^{0}\right) = \frac{b(0)}{\ln 2}\left(e^{\ln 2} - 1\right) = \frac{b(0)}{\ln 2}.$$

Det efterfrågade medelvärdet beror alltså inte på k.

Riktlinjer för bedömningen: Integralfunktion 2 p. Insättning av gränserna i den bestämda integralen +1 p. Förenkling av uttrycket +1 p. Svar på frågan om medelvärdets beroende av konstanten k +1 p.