

Valintakoe A 2026

Ratkaisut

Eriytyvän syventävän osion matematiikan tehtävät

C1 Matematiikan tehtävä.

C1.1 Vastaus on n. 1362 euroa.

Perustelu: Tarvittava pääoma saadaan diskonttaamalla 1., 2. ja 3. vuoden päästä maksettavat stipendit korkokertoimella $q = 1,05$. Täten sijoitettavan pääoman on oltava

$$K = 500q^{-1} + 500q^{-2} + 500q^{-3} = 1361,624\dots$$

C1.2 Vastaus on 90° .

Perustelu: Pisteestä B pisteeseen A piirretty vektori on $\overline{BA} = \vec{i} + 2\vec{j} - (4\vec{i} + \vec{j}) = -3\vec{i} + \vec{j}$, ja vastaavasti pisteestä B pisteeseen C piirretty vektori on $\overline{BC} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - (4\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i} + 3\vec{j}$. Näiden pistetulo on $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = (-3\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\vec{i} + 3\vec{j}) = -3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 0$, joten kolmion kyljet BA ja BC ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Täten kysyty kulma on 90° .

C1.3 Mahdollinen vastaus: $a = 2$, $b = \frac{12\pi}{149}$, $c = -\frac{245\pi}{298}$ ja $d = 6$, jolloin

$$h(t) = 2 \sin\left(\frac{12\pi}{149}t - \frac{245\pi}{298}\right) + 6.$$

Perustelu: Vakiot eivät määräydy yksikäsitteisesti, vaan riippuvat vakion a merkin valinnasta, sekä kohdasta, jossa tarkastellaan sinifunktion minimiarvoa ja sitä seuraavaa maksimiarvoa. Tässä esimerkkiratkaisussa sini-funktion pienin arvo -1 valitaan kiinnitettäväksi kohtaan $-\frac{\pi}{2}$ jolloin seuraavan maksimiarvon 1 kohta on $\frac{\pi}{2}$.

Tässä esimerkkiratkaisussa valitaan myös $a > 0$, jolloin veden korkein kohta on $8 = a \cdot 1 + d$ ja matalin kohta $4 = a \cdot (-1) + d$. Näin saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a + d = 8 \\ -a + d = 4. \end{cases}$$

Vähentämällä ylemmästä yhtälöstä alempi saadaan $2a = 4$, josta $a = 2$. Sijoittamalla tämä ylempään yhtälöön saadaan $d = 6$.

Korkeuden minimi- ja maksimiarvoa vastaavat ajankohdat ovat klo 4.00 ja 16.25, mikä merkitsee $16 + \frac{25}{60} = \frac{197}{12}$ tuntia. Näistä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} b \cdot 4 + c = -\frac{\pi}{2} \\ b \cdot \frac{197}{12} + c = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vähentämällä ylempi yhtälö alemmasta saadaan $b \cdot \frac{149}{12} = \pi$, josta $b = \frac{12\pi}{149}$. Sijoittamalla tämä ensimmäiseen yhtälöön saadaan ratkaistua $c = -\frac{245\pi}{298}$.

C2 Matematiikan tehtävä.

C2.1 Mallivastaus: Koska

$$b(t) = b(0) e^{kt},$$

on

$$b'(t) = b(0) e^{kt} \cdot k = k \cdot b(t),$$

mistä nähdään, että määrän muutosnopeus $b'(t)$ on verrannollinen määrään $b(t)$ kaikilla t :n arvoilla. Verrannollisuuskerroin on k .

C2.2 Mallivastaus:

$$b(t+T) = 2b(t) \Leftrightarrow b(0) e^{k(t+T)} = 2b(0) e^{kt} \Leftrightarrow b(0) e^{kt} e^{kT} = 2b(0) e^{kt} \Leftrightarrow b(0) e^{kT} = 2b(0).$$

Jos $b(0) = 0$, on kaikilla ajanhetkillä $b(t) = 0$ ja silloin kahdentumisajaksi voidaan valita mikä hyvänsä luku, esim. $T = k$.

Jos taas $b(0) \neq 0$, saadaan jakamalla

$$e^{kT} = 2 \Leftrightarrow kT = \ln 2 \Leftrightarrow T = \frac{\ln 2}{k}.$$

Kahdentumisaika T ei siis riipu ajanhetkestä t .

C2.3 Mallivastaus: Suoraan laskemalla saadaan

$$\frac{1}{T} \int_0^T b(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T b(0) e^{kt} dt = \frac{b(0)}{T} \int_0^T \frac{1}{k} e^{kt} = \frac{b(0)}{kT} (e^{kT} - e^0) = \frac{b(0)}{\ln 2} (e^{\ln 2} - 1) = \frac{b(0)}{\ln 2}.$$

Kysytty keskiarvo ei siis riipu vakiosta k .