Urvalsprov A 2026
Lösningar

Den gemensamma delens uppgifter i matematik

Tillägg 15.6.2026: Uppgifterna kan lösas på många olika sätt, och nedan presenteras även alternativa lösningsmetoder för en del av uppgifterna.

A1 Uppgift i matematik.

A1.1 Svaret är 25.

Motivering: $\frac{5-4}{4} \cdot 100\,\% = 25\,\%$.

A1.2 Svaret är $\frac{63}{80}$.

Motivering:

$$\frac{3x^2}{(4x)^2} + \frac{3}{5} = \frac{3x^2}{16x^2} + \frac{3}{5} = \frac{3}{16} + \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 5}{16 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 16}{5 \cdot 16} = \frac{63}{80}.$$

A1.3 Svaret är $x = 4$.

Motivering:

$$\sqrt{x+12} = x \Rightarrow x + 12 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2},$$

så $x = 4$ eller $x = -3$. Genom insättning ser man att $x = 4$ uppfyller den ursprungliga ekvationen men att $x = -3$ inte gör det. Därför är uppgiftens enda lösning $x = 4$.

Alternativ motivering: Uppgiften kan också lösas genom att man går igenom svarsalternativen. De är

1. $x = -4$ och $x = 3$
2. $x = 12$
3. $x = 4$
4. $x = 8$
5. $x = 4$ och $x = -3$
6. $x = 8$ och $x = -6$.

Alternativen 1, 5 och 6 kan gallras bort på basen av att x får ett negativt värde i de här fallen, medan kvadratroten inte kan ta negativa värden. Alternativ 4 är fel, eftersom $\sqrt{8+12} \approx 4.47$ (med räknare) är olika 8. Alternativ 5 är fel, eftersom $\sqrt{12+12} \approx 4.90$ (med räknare) är olikt 12. Alternativ 3 är rätt, eftersom $\sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$.

A1.4 Svaret är $\dfrac{5}{9}$.

Motivering:

$$8^{3x-1} = 4 \Leftrightarrow (2^3)^{3x-1} = 2^2 \Leftrightarrow 2^{3(3x-1)} = 2^2.$$

Då funktionen $f(x) = 2^x$ är strängt växande, så uppfylls den ursprungliga ekvationen om och endast om

$$3(3x-1) = 2 \Leftrightarrow 9x - 3 = 2 \Leftrightarrow 9x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{9}.$$

A1.5 Svaret är $-6 < x < 0$ eller $x > 0$.

Motivering: För $x = 0$ blir både vänster och höger led noll. Vi studerar de återstående fallen $x > 0$ och $x < 0$ skilt för sig. I fallet $x > 0$ får olikheten formen

$$x(x+5) > x \Leftrightarrow x + 5 > 1 \Leftrightarrow x > -4,$$

så här löser alla $x > 0$ olikheten. I fallet $x < 0$ får olikheten formen

$$-x(x+5) > x \Leftrightarrow x + 5 > -1 \Leftrightarrow x > -6,$$

så här bestäms lösningarna av $-6 < x < 0$. Svaret på frågan fås genom att kombinera de två dellösningarna.

Alternativ motivering: Man kan lösa uppgiften genom att pröva med vissa väl valda tal. Sådana tal kan vara ändpunkterna för relevanta intervall, t.ex. intervallets $-6 < x < 0$ ändpunkter -6 och 0, och tal som är litet större eller litet mindre än ändpunkterna. Genom att välja t.ex. ändpunkten 0 och det litet större talet 1 samt det litet mindre talet -1, kan man på basen av svarsalternativen

1. $x > -6$
2. $x > 4$
3. $x < -4$ eller $x > 6$
4. $x > 0$
5. $-6 < x < 0$ eller $x > 0$
6. $-6 < x < -4$

dra följande slutsatser: Insättning av $x = 0$ utesluter alternativ 1, för det här värdet på x uppfyller inte olikheten. Insättning av $x = 1$ uppfyller å sin sida olikheten, vilket utesluter alternativen 2 och 3. Till sist utesluter insättningen $x = -1$ alternativen 4 och 6 genom att uppfylla olikheten. Kvar blir bara alternativ 5.

A2 Uppgift i matematik.

A2.1 Svaret är 12.

Motivering: Den längsta sidan i en rätvinklig triangel är hypotenusan, så den okända sidan x är alltså en katet. Då ger Pythagoras sats att $5^2 + x^2 = 13^2$, så $x^2 = 13^2 - 5^2 = 144 = 12^2$, och därför är $x = 12$.

A2.2 Svaret är 58.

Motivering: $d = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$ och $a_{20} = a_1 + (20 - 1) \cdot d = 1 + 19 \cdot 3 = 58$.

A2.3 Svaret är $\frac{11}{4165}$.

Motivering: Med uttrycket att korten dras slumpmässigt avses här att alla kort har lika stor sannolikhet att bli valt. Då är sannolikheten för att ett ruterkort dras lika med antalet ruterkort i kortleken delat med totala antalet kort. Det första dragna kortet är alltså ett ruterkort med sannolikheten $\frac{13}{52}$. Då man beräknar sannolikheterna för de följande kortena, så behöver man beakta att antalet ruter som finns kvar och totala antalet kort som finns kvar båda minskar. Sannolikheterna för att de till näst dragna korten ska vara ruter är $\frac{12}{51}$, $\frac{11}{50}$ och $\frac{10}{49}$. Sannolikheten som efterfrågas i uppgiften fås nu ur multiplikationsprincipen:

$$\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} = \frac{11}{4165}.$$

A2.4 Svaret är $3{,}72$.

Motivering: Vi betecknar ränteprocenten med p. Vi får då räntekoefficienten $q = 1 + \frac{p}{100}$ och ekvationen

$$1000\left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 = 1200 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 = \frac{6}{5} \Leftrightarrow 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[5]{\frac{6}{5}} \Leftrightarrow p = 100\left(\sqrt[5]{\frac{6}{5}} - 1\right) = 3{,}7137\ldots.$$

Eftersom vi vill uppnå 1200 euro, så avrundas svaret uppåt.

A2.5 Svaret är 8.

Motivering:

$$2\cos^2(2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vi delar upp fortsättningen på basen av tecknet.

Vi undersöker först fallet $\cos(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Då finns två möjligheter:

1)

$$2x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + n\pi,$$

där $n \in \mathbb{Z}$. Endast för $n \in \{0, 1\}$ fås lösningar x i intervallet $[0, 2\pi]$, nämligen $\frac{\pi}{8}$ och $\frac{9\pi}{8}$, och

2)

$$2x = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + n\pi,$$

där $n \in \mathbb{Z}$. Här fås för $n \in \{1, 2\}$ lösningar x i intervallet $[0, 2\pi]$; närmare bestämt $\frac{7\pi}{8}$ och $\frac{15\pi}{8}$.

Nu går vi vidare till fallet $\cos(2x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Också här fås två möjligheter:

1)

$$2x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \pi n,$$

varav $n \in \{0, 1\}$ ger lösningar i $[0, 2\pi]$; följande: $\dfrac{3\pi}{8}$ och $\dfrac{11\pi}{8}$, och

2)

$$2x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{8} + \pi n,$$

varav $n \in \{1, 2\}$ ger följande lösningar i intervallet $[0, 2\pi]$: $\dfrac{5\pi}{8}$ ja $\dfrac{13\pi}{8}$.

Lösningarna i intervallet $[0, 2\pi]$ är alltså

$$\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8} \text{ och } \frac{15\pi}{8}.$$

De här är sammanlagt 8 stycken.

Alternativ motivering: Genom att beteckna $\cos(2x) = z$ kan man identifiera den ursprungligen givna ekvationen som en andragradsekvation i z, nämligen $2z^2 - 1 = 0$. Den här ekvationen har två lösningar, $z_1 = 1/\sqrt{2}$ och $z_2 = -1/\sqrt{2}$. Vi börjar med att undersöka ekvationen $\cos(2x) = 1/\sqrt{2}$. Med räknarens hjälp hittar man att en lösning är $2x = 45$ grader, så $x_1 = 22{,}5$ grader är en lösning till den ursprungliga ekvationen.

Baserat på formelbilagan, $360°$ är 2π radianer, vilket betyder att π radianer är lika med $180°$, osv. Cosinusfunktionens symmetriegenskap $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ ges i formelbilagan, och den blir alltså uttryckt i grader

$$\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha. \tag{1}$$

Här ser vi att

$$\cos\Big(2(90 - x_1)\Big) = -\cos(2x_1) = -1/\sqrt{2},$$

så $x_2 = 90 - x_1 = 67{,}5$ grader löser också den ursprungliga ekvationen. Vi har nu hittat två olika lösningar till den ursprungliga ekvationen, och vi visar till näst att dessa två lösningar båda har tre reflekterade lösningar, som uppstår ur periodicitet och symmetri, så att den ursprungliga ekvationen sammanlagt har minst åtta olika lösningar.

Genom att substituera $-\alpha$ i symmetriformeln (1) fås

$$\cos(180 + \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha,$$

där den sista likheten också hittas i formelbilagan. Då är också

$$\cos\Big(2(90 + x_1)\Big) = -\cos(2x_1) = -1/\sqrt{2},$$

så $x_3 = 90 + x_1 = 112{,}5$ grader löser den ursprungliga ekvationen. På samma sätt fås att $x_5 = 90 + x_3 = 202,5$ grader och $x_7 = 90 + x_5 = 292{,}5$ grader löser den ursprungliga ekvationen. Genom att använda x_2 i stället för x_1 i samma argument, så fås att $x_4 = x_2 + 90 = 157{,}5$ grader, $x_6 = x_2 + 180 = 247{,}5$ grader och $x_2 + 270 = 337{,}5$ grader också löser den ursprungliga ekvationen.

Om den ursprungliga ekvationen skulle ha en nionde lösning, så skulle den nionde lösningen med samma motivering också ha tre reflekterade lösningar, varvid den ursprungliga ekvationen skulle ha minst 12 lösningar. Svarsalternativet 10 är alltså omöjligt, och ekvationen har då 8 lösningar.

Urvalsprov A 2026
Lösningar

Logisk slutledning och problemlösning (Uppgifterna B1 och B2)

B1.1 Sågning Svar: 20 minuter. Motivering: En sågning tar 10 minuter. För att såga brädan i tre delar, bör två sågningar utföras. Således tar det tid 20 minuter.

B1.2 Avstånd Svar: 31. Motivering: Vi noterar först att resetiderna A–B och K–M är sammanlagt 10 och på motsvarande sätt även L–I och D–E är sammanlagt 10. Det är alltså fråga om att jämföra resetiden B–K med resetiden I–D. C–D som saknas är betecknat med x och J–K med y. Vi går igenom alla alternativ och väljer de snabbaste. Den snabbaste resetiden B–K är alltså antingen $15 + x$ eller $12 + y$. Vi vet således att antingen är $x = 5$ eller $y = 8$. Resetiden mellan I och D är på motsvarande sätt antingen $13 + x$ eller $13 + y$, dvs. 18 eller 21, så det tar tid högst 21. Vi lägger ännu till 10 för förbindelserna L–I och D–E. Vi bestämde oss för att ge 1 poäng för svaret 28, för det visar ändå på viss förståelse för uppgiften.

B1.3 Lådor Svar: Lådan till vänster. Motivering: Vi vet att bara en av texterna är sann. Om guldtackan var i lådan i mitten, skulle texterna på både lådan till vänster och lådan i mitten vara sanna. Således är guldtackan inte i lådan i mitten. Således är texten sann på lådan till höger. Eftersom endast en av texterna är sann, bör texterna på lådan i mitten och lådan till vänster vara falska. Texten på lådan i mitten “Guldtackan är i denna låda” är falsk. Texten på lådan till vänster måste också vara falsk. Den texten är “Guldtackan är inte i denna låda.” Således är textens negation “Guldtackan är i denna låda.” sann.

B1.4 Mynt a) Svar $x = 10$. Motivering: Ett mynt kan inte samtidigt vara krona och klave, så det största möjliga x är det största heltal som uppfyller olikheten $0.6x + 0.6x \leq 12$, alltså $1.2x \leq 12$, dvs. $x \leq 10$.

b) Svar $y = 70$. Motivering: Ett mynt kan inte samtidigt vara krona och klave, så det största möjliga y är det största heltal som uppfyller olikheten $\frac{2}{3}y + \frac{3}{4}y \leq 100$, alltså $\frac{8}{12}y + \frac{9}{12}y = \frac{17}{12}y \leq 100$. Således är $y \leq \frac{12}{17} \cdot 100 = 70,588\ldots$. Svaret är alltså 70. Vi kontrollerar: $\frac{2}{3} \cdot 70 = 46\frac{2}{3}$, dvs. 47 krona och $\frac{3}{4} \cdot 70 = 52\frac{1}{2}$, dvs. 53 klave. Sammanlagt har vi här alla 100 mynt.

B1.5 Konfekt Svar: 44. Motivering: I Mikkos konfektask finns $8m + k$ konfektbitar och i Kalles konfektask $9n + l$. Dessutom är $m + l = 13$. Alla tal m, n, l och k är icke-negativa heltal och $k \leq 7$ och $l \leq 8$. Därför är $m = 13 - l \geq 5$. Vi sätter in $l = 13 - m$ och får $9m + k = 9n + 13$, dvs. $9(m - n) = 13 - k$. Eftersom $k \leq 7$ är enda möjligheten $m - n = 1$ dvs. $m = n + 1$ och $k = 4$. Vi provar först det minsta möjliga m, dvs. $m = 5$, $n = 4$ och nu har vi $l = 8 \cdot 5 + 4 - 9 \cdot 4 = 8$. Vi kontrollerar: $m + l = 13$. I konfektasken finns alltså $8m + k = 9n + l = 44$ konfektbitar. (Andra större lösningar finns nog. Om vi väljer $m = 6$ och $n = 5$ så är $8m + k = 9n + l = 52$ och $m + l = 13$, eller $m = 7$ och $n = 6$ så är $8m + k = 9n + l = 60$, eller $m = 8$ och $n = 7$ så är $8m + k = 9n + l = 68$. Men det var fråga om det minsta antalet i uppgiften.)

B2.1 Traverseringsordning Svar: `ABDHIECFG`

B2.2 Jämförelse av sökalgoritmerna Svar:

- Djupet-först-sökning
- Bredden-först-sökning
- Djupet-först-sökning
- Djupet-först-sökning

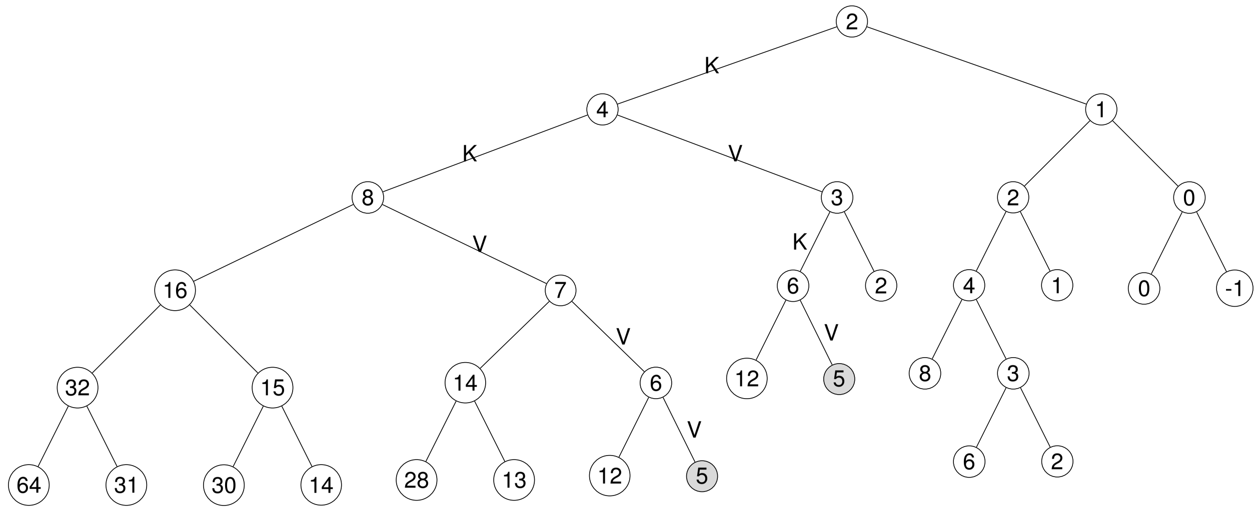
B2.3 En serie operationer Svar:

- Båda sökalgoritmerna hittar en lösning, men djupet-först-sökningen hittar en kortare serie operationer än bredden-först-sökningen. **Fel.** Bredden-först-sökningen hittar serien operationer `KVKV`, som är kortare än serien operationer `KKVVV` som djupet-först-sökningen hittar; se figur 1.
- Båda sökalgoritmerna hittar en serie operationer av samma längd, eftersom begränsningen av antalet operationer gör att båda sökalgoritmerna måste gå igenom samma antal noder. **Fel.** Begränsningen på trädets höjd förorsakar inte att algoritmerna går igenom samma mängd noder, för de kan hitta lösningen på olika ställen i trädet.
- Ingendera sökalgoritmen hittar någon lösning, eftersom man av talet 2 inte kan få talet 5 med de givna operationerna.**Fel.** Båda algoritmerna hittar en lösning, som figuren 1 utvisar.
- Djupet-först-sökningen hittar ingen serie operationer som gör att vi av talet 2 får talet 5. **Fel.** Båda hittar en lösning, som figuren 1 utvisar.
- Båda sökalgoritmerna hittar en lösning, men bredden-först-sökningen hittar en kortare serie operationer än djupet-först-sökningen. **Rätt.**

B2.4 Antal noder i ett träd Svar: $\frac{1-m^{h+1}}{1-m}$. Motivering: Antalet rotnoder är ett (m^0). Noder på avståndet 1 från rotnoden är m (m^1). Noder på avståndet 2 är m^2, och så vidare. På lägsta "nivån", dvs. de noder som finns på avståndet h från rotnoden, finns det m^h noder. Alltså på avståndet i finns det m^i noder, för i i intervallet $0 \leq i \leq h$. Avstånden börjar från noll ($m^0, m^1, \ldots, m^h$), så antalet termer är $h+1$. Resultatet fås med formeln för geometrisk summa.

B2.5 Antal lövnoder i ett träd Svar: $hm - h + 1$. Motivering: Ett träd med minimiantal lövnoder är sådant att på varje "nivå" dvs. på avståndet $i = 1, 2, \ldots, h-1$ från rotnoden, är en nod inte lövnod och de andra $m-1$ noderna är lövnoder, förutom på den lägsta "nivån", dvs. på avståndet h från rotnoden, är alla m noder lövnoder. Lövnoder finns det alltså sammanlagt $(h-1) \times (m-1) + m$. Denna formel kan förenklas till $hm - h + 1$.

Exempel: Då $h = 2$ och $m = 3$, är minimiantalet lövnoder $2 * 3 - 2 + 1 = 5$. På avståndet 1 är 2 av noderna lövnoder och 1 är inte lövnod. Avståndet 2 är det största avståndet från rotnoden, så alla dess noder är lövnoder, dvs. 3 lövnoder. Tillsammans finns det $2 + 3 = 5$ lövnoder.



Figur 1: Utförandet av operationerna K och V på talet 2 fem gånger. Rutterna för djupet-först-sökningen och bredden-först-sökningen är noterade i figuren.