

Valintakoe A 2025

Mallivastaukset

Matematiikan syventävä eriytyvä osio

C1 Matematiikan syventävä tehtävä

C1.1 Geometrisen lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ ensimmäiset jäsenet ovat $a_1 = 2$ ja $a_2 = 6$. Laske $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$.

Mallivastaus: Geometrisen summan suhdeluku saadaan peräkkäisten termien osamääränä: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$. Summa voidaan laskea kaavan perusteella:

$$S_{20} = a_1 \frac{1 - q^{20}}{1 - q} = 2 \cdot \frac{1 - 3^{20}}{1 - 3} = 3^{20} - 1 = 3\,486\,784\,400.$$

Pisteytyksen suuntalinjat: Huomattu, että pitää löytää suhdeluku 1 p, suhdeluku oikein 1 p. Kaavaan oikea soveltaminen 2 p, numeerinen arvo oikein 1 p. Maksimi 5 p, pelkästä lopputuloksesta ilman perusteluja maksimi 1 p.

C1.2 Etsi vektorille $2\vec{j}$ komponenttiesitys $2\vec{j} = x\vec{a} + y\vec{b}$ vektoreiden $\vec{a} = \vec{i}$ ja $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ avulla.

Mallivastaus: Esityksestä $2\vec{j} = x\vec{i} + y(\vec{i} + \vec{j}) = (x + y)\vec{i} + y\vec{j}$ saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y = 2. \end{cases}$$

Tämän ratkaisut ovat $(x, y) = (-2, 2)$.

Pisteytyksen suuntalinjat: Yhtälöparin muodostaminen oikein 3 p, ratkaisu oikein 2 p. Maksimi 5 p, jonka saa jos vastaus on päätelty ja perusteltu täsmällisesti oikeaksi.

C1.3 Määritä funktion $f(x) = x^3 - 12x + 5$ suurin ja pienin arvo välillä $[-3, 4]$.

Mallivastaus: Derivaattafunktio $f'(x) = 3x^2 - 12$ saavuttaa nollakohtansa kun $3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Funktio saavuttaa ääriarvonsa joko derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä. Koska $f(-3) = 14$, $f(-2) = 21$, $f(2) = -11$ ja $f(4) = 21$, on kysytty minimi -11 ja maksimi 21 .

Pisteytyksen suuntalinjat: Ääriarvojen etsimisessä huomioitu kaikki mahdolliset ääriarvopisteet pisteet 1 p, derivaatta oikein 1 p, derivaatan nollakohdat oikein 1 p, funktion arvot mahdollisissa ääriarvopisteissä (ainakin 2 oikein laskettu) 1 p, päätelty oikeat ääriarvot, eikä ratkaisussa ole virheitä 1 p. Maksimi 5 p

C2 Matematiikan syventävä tehtävä

C2.1 Kappale tuodaan nolla-asteisesta ulkoilmasta sisälle ajanhetkellä $t = 0$, ja sen lämpötilaa kuvaa funktio $T(t) = 21(1 - e^{-t/3})$, kun $t \geq 0$. Lämpötila esitetään celsiusasteina ja ajan yksikkönä on minuutti. Kaavassa $e = 2,71828 \dots$ on Neperin luku.

Millä ajanhetkellä kappaleen lämpötila saavuttaa arvon 20? Anna vastauksen tarkka arvo ja likiarvo minuutin tarkkuudella.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} 21(1 - e^{-t/3}) = 20 &\Leftrightarrow 1 - e^{-t/3} = \frac{20}{21} \Leftrightarrow e^{-t/3} = \frac{1}{21} \Leftrightarrow -t/3 = \ln \frac{1}{21} \\ &\Leftrightarrow t = -3 \ln \frac{1}{21} = 3 \ln 21 \approx 9. \end{aligned}$$

Pisteytyksen suuntalinjat: Yhtälö muodostettu oikein 1 p, ratkaisu muotoon $\pm e^a = b$ oikein 1 p, logaritmi oikein 1 p, ratkaisu oikein 1p, likiarvo oikein 1 p. Yhtälön $= 20$ sijaan voi olla myös muotoa ≥ 20 oleva epäyhtälö. Likiarvo 10 hyväksytään myös. Maksimi 5 p.

C2.2 Mikä on kappaleen lämpötilan kasvunopeus $T'(t)$ ajanhetkellä $t = 10$?

Mallivastaus: $T'(t) = 21(-e^{-t/3}(-\frac{1}{3})) = 7e^{-t/3}$, josta $T'(10) = 7e^{-10/3} \approx 0,25$.

Pisteytyksen suuntalinjat: Ryhdytty derivoimaan 1 p, vakiofunktion derivointi oikein 1 p, eksponenttifunktion derivointi oikein 2 p, likiarvo oikein 1 p. Maksimi 5 p, pelkästä lopputuloksesta ilman perusteluja maksimi 1 p.

C2.3 Laske kappaleen keskilämpötilaa ensimmäisen yhdeksän minuutin aikana esittävä integraali $\frac{1}{9} \int_0^9 T(t) dt$.

Mallivastaus:

$$\frac{1}{9} \int_0^9 21(1 - e^{-t/3}) dt = \frac{7}{3} \int_0^9 (1 - e^{-t/3}) dt = \frac{7}{3} (t + 3e^{-t/3}) \Big|_0^9 = \frac{7}{3} (9 + 3e^{-3} - 3) = 14 + 7e^{-3} \approx 14.$$

Pisteytyksen suuntalinjat: Vakiofunktion integrointi oikein 1 p, eksponenttifunktion integrointi oikein 1 p, määrätyn integraalin idea oikein 1 p. Oikea tulos esiintyy jossain välivaiheessa, mahdollisesti sieventämättömänä 1 p, lopullinen sievennetty tulos oikein 1 p. Maksimi 5 p.