Urvalsprov A 2025
Modellsvar

Den fördjupade differentierade delen i matematik

C1 Uppgift i fördjupad matematik

C1.1 En geometrisk talföljd a_1, a_2, a_3 har de inledande termerna $a_1 = 2$ och $a_2 = 6$. Beräkna $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{20}$.

Modellsvar: Gemensamma kvoten för den geometriska summan är kvoten av två på varandra följande termer: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$. Summan kan beräknas med formeln:

$$S_{20} = a_1 \frac{1 - q^{20}}{1 - q} = 2 \cdot \frac{1 - 3^{20}}{1 - 3} = 3^{20} - 1 = 3\,486\,784\,400.$$

Riktlinjer för bedömningen: Noterat, att gemensamma kvoten ska beräknas 1 p, gemensamma kvoten korrekt 1 p. Summaformeln korrekt tillämpad 2 p, numeriska resultatet korrekt 1 p. Maximalt 5 p, enbart slutresultatet utan motiveringar ger maximalt 1 p.

C1.2 Sök en komponentrepresentation av vektorn $2\bar{j}$ av formen $2\bar{j} = x\bar{a} + y\bar{b}$, där $\bar{a} = \bar{i}$ och $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j}$.

Modellsvar: Ur komponentrepresentationen $2\bar{j} = x\bar{i} + y(\bar{i} + \bar{j}) = (x + y)\bar{i} + y\bar{j}$, fås ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ y &= 2. \end{cases}$$

Systemets lösningar är $(x, y) = (-2, 2)$.

Riktlinjer för bedömningen: Korrekt ekvationspar 3 p, lösningen rätt 2 p. Maximalt 5 p, som ges då svaret är härlett korrekt och motiverat som exakt rätt.

C1.3 Bestäm det största och minsta värdet för funktionen $f(x) = x^3 - 12x + 5$ i intervallet $[-3, 4]$.

Modellsvar: Derivatafunktionen $f'(x) = 3x^2 - 12$ har nollställen då $3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Funktionens extremvärden finns antingen i derivatans nollställen eller i intervallets ändpunkter. Eftersom $f(-3) = 14$, $f(-2) = 21$, $f(2) = -11$ och $f(4) = 21$, är det sökta minimivärdet -11 och maximivärdet 21.

Riktlinjer för bedömningen: Alla tänkbara extremställen noterade 1 p, derivatan korrekt 1 p, derivatans nollställen korrekta 1 p, funktionsvärden i potentiella extremställen (åtminstone 2 korrekt beräknade) 1 p, korrekta extremvärden härledda utan misstag 1 p. Maximalt 5 p.

C2 Uppgift i fördjupad matematik

C2.1 En fast kropp tas in från nollgradig uteluft vid tidpunkten $t = 0$ och kroppens temperatur beskrivs av funktionen $T(t) = 21(1 - e^{-t/3})$, då $t \geq 0$. Temperaturen mäts i celsiusgrader och tiden i minuter. I formeln betecknar $e = 2{,}71828\ldots$ Nepers tal.

Vid vilken tidpunkt uppnår kroppens temperatur värdet 20? Ge svaret i exakt form samt som närmevärde med en minuts noggrannhet.

Modellsvar:

$$\begin{aligned} 21(1 - e^{-t/3}) = 20 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - e^{-t/3} = \frac{20}{21} \Leftrightarrow e^{-t/3} = \frac{1}{21} \Leftrightarrow -t/3 = \ln\frac{1}{21} \\ &\Leftrightarrow \quad t = -3\ln\frac{1}{21} = 3\ln 21 \approx 9. \end{aligned}$$

Riktlinjer för bedömningen: Ekvationen korrekt 1 p, lösningen i formen $\pm e^a = b$ korrekt 1 p, logaritmen rätt 1 p, lösningen rätt 1 p, närmevärdet rätt 1 p. I stället för ekvationen $= 20$ godkänns även motsvarande olikhet i formen ≥ 20. Närmevärdet 10 godkänns också. Maximalt 5 p.

C2.2 Vilken är tillväxthastigheten $T'(t)$ för kroppens temperatur vid tidpunkten $t = 10$?

Modellsvar: $T'(t) = 21(-e^{-t/3}(-\frac{1}{3})) = 7e^{-t/3}$, vilket ger $T'(10) = 7e^{-10/3} \approx 0{,}25$.

Riktlinjer för bedömningen: Deriveringen påbörjad 1 p, konstanten deriverad korrekt 1 p, exponentialfunktionen deriverad korrekt 2 p, närmevärdet korrekt 1 p. Maximalt 5 p, enbart slutresultatet utan motiveringar ger maximalt 1 p.

C2.3 Beräkna integralen $\frac{1}{9}\int_0^9 T(t)\,dt$, som visar kroppens medeltemperatur under de första nio minuterna.

Modellsvar:

$$\frac{1}{9}\int_0^9 21(1 - e^{-t/3})\,dt = \frac{7}{3}\Big/_0^9 (t + 3e^{-t/3}) = \frac{7}{3}(9 + 3e^{-3} - 3) = 14 + 7e^{-3} \approx 14.$$

Riktlinjer för bedömningen: Konstanten integrerad korrekt 1 p, exponentialfunktionen integrerad korrekt 1 p, bestämda integralens princip rätt 1 p. Rätt resultat i något mellansteg, ev. i ohyfsad form 1 p, slutresultatet korrekt och hyfsat 1 p. Maximalt 5 p.