

Urvalsprov A 2025

Lösningar

Den gemensamma delen

A1 Uppgift i matematik

A1.1 Svaret är $x \geq 7$.

Motivering: $4x + 7 \leq 6x - 7 \Leftrightarrow -2x \leq -14 \Leftrightarrow x \geq 7$.

A1.2 Svaret är 7.

Motivering: Ekvationen $x^2 - x - 12 = 0$ har lösningarna $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2}$. Den större lösningen är alltså 4 och den mindre -3 . Differensen mellan den större och den mindre lösningen är således $4 - (-3) = 7$.

A1.3 Linjernas enda skärningspunkt är $(\frac{4}{7}, -\frac{2}{7})$.

Motivering: Skärningspunktens x -koordinat fås genom att sätta in $y = 3x - 2$ i den andra linjens ekvation, vilket ger $x + 2(3x - 2) = 0 \Leftrightarrow 7x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{7}$. Sätter man in detta i ekvationen $x + 2y = 0$ fås $\frac{4}{7} + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = -\frac{2}{7}$.

A1.4 Svaret är $\frac{1}{36}$.

Motivering: Det först kastet ger utfallet 1 med sannolikheten $\frac{1}{6}$ och andra kastet ger utfallet 3 med sannolikheten $\frac{1}{6}$. De oberoende händelsernas sannolikhet fås med produktregeln $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

A1.5 Svaret är $\frac{1}{12}$.

Motivering: Tärningskastens resultat, där summan av utfallen är 4, är $(1, 3)$, $(2, 2)$ och $(3, 1)$. Dessa är ömsesidigt uteslutande, så den sökta sannolikheten fås som summan av deras sannolikheter. Liksom i uppgift A1.4 kan man konstatera, att vardera resultatets sannolikhet är $\frac{1}{36}$. Den efterfrågade sannolikheten är alltså $3 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$.

A2 Uppgift i matematik

A2.1 Svaret är 2.

Motivering: Triangeln kan delas upp i två likadana rätvinkliga trianglar genom att rita in en höjd från basen till triangelbenens skärningspunkt. De båda rätvinkliga trianglarna har kateterna 1 och $\sqrt{3}$, med triangelbenen som hypotenusor. Längden hos en sådan hypotenus är således $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

A2.2 Svaret är $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Motivering: Cosinusvärdena fås genom att bestämma de i uppgift A2.1 närliggande kateternas förhållande till hypotenusan.

A2.3 Svaren är $(3, 3)$, $(-2, -12)$ och $(10, 24)$.

Motivering: Linjens ekvation har formen $y = 3x + b$. Från skärningspunkten får man ekvationen $0 = 3 \cdot 2 + b$, vilket ger $b = -6$. Punkterna på linjen uppfyller linjens ekvation $y = 3x - 6$.

A2.4 Svaret är 40 cm och 10 cm.

Motivering: Måtten krymper med $4,00 \text{ m} \cdot 0,10 = 40 \text{ cm}$ och $2,00 \text{ m} \cdot 0,05 = 10 \text{ cm}$.

A2.5 Svaret är 14,5 %.

Motivering: Den krympta tygbiten har arean $3,60 \cdot 1,90 \text{ m}^2 = 6,84 \text{ m}^2$, vilket ger minskningen $8,00 \text{ m}^2 - 6,84 \text{ m}^2 = 1,16 \text{ m}^2$. I förhållande till den ursprungliga arean är detta alltså 0,145 och i procent 14,5 %.

B1 Uppgift i logisk slutledning och problemlösning

B1.1 Strumporna Svar: 4

Motivering: Om man tar 3 strumpor är det möjligt att få en svart, en blå och en vit. Då man tar en fjärde strumpa, har den samma färg som någon strumpa som redan tagits.

B1.2. Pumpkraftverk Svar: 4 timmar 48 minuter.

Motivering: Låt mängden vatten som A pumpar vara x enheter i timmen, B y enheter och C z enheter. Vi vet att $4x + 4y + 4z = 8y + 8z = 6x + 6z$. Av detta får vi $x = 3z$ och $y = 2z$ och tankens volym är således $24z$. Vi frågade efter tiden a , för vilken $a(x + y) = 24z$, dvs. $5az = 24z$. Vi får då som svar $a = 24/5 = 4,8$ timmar. 0,8 timmar är 48 minuter.

B1.3 Lamporna Svar: 16

Motivering: Eftersom $14 \cdot 7 = 98$, behövs åtminstone 15 åtgärder. Varje åtgärd ändrar läget för 7 lampor, så antalet lampor som tänds kan stiga med 1, 3, 5 eller 7 lampor. Eftersom vi ska byta läge för 100 lampor och 100 är ett jämnt tal, måste antalet åtgärder vara ett jämnt tal (annars skulle slutresultatet vara att ett udda antal lampor tänds). Således är minsta antalet åtgärder 16. Vi visar ännu att 16 räcker till.

Antigen gör man 10 åtgärder där 7 fler lampor tänds och 6 åtgärder där 5 fler lampor tänds ELLER 13 åtgärder där 7 fler lampor tänds och 3 åtgärder där 3 fler lampor tänds. Nämligen $10 \cdot 7 + 6 \cdot 5 = 100$ och $13 \cdot 7 + 3 \cdot 3 = 100$.

B1.4 Lögnare Svar: Dani och Kalle ljugar, Emmi och Fanny talar sanning.

Motivering: Om Kalle talade sanning, skulle både Dani och Emmi ljuga. Men Dani säger att Emmi ljugar, alltså för att Dani skulle ljuga, måste Emmi tala sanning. Motsägelse, alltså Kalle ljugar.

Kalle säger att Fanny ljugar. Men eftersom Kalle ljugar vet vi nu att Fanny talar sanning. Fanny säger att Dani ljugar och eftersom hon talar sanning, vet vi nu att Dani ljugar. Dani, som ljugar, säger att Emmi ljugar, alltså vet vi nu att Emmi talar sanning.

Låt oss ännu kolla att allt stämmer. De andra påståendena är uppenbara, men låt oss kolla Kalles påstående "Både Dani och Emmi ljugar". Men Emmi talar sanning, så Kalles påstående är falskt, som det också borde vara, eftersom Kalle ljugar.

B2 Uppgift i logisk slutledning och problemlösning

B2.1 Viktat medelvärde Svar: $a = 4/7$, $b = 2/7$ ja $c = 1/7$.

Motivering: I uppgiften sägs det att värdet på c är hälften av värdet på b och värdet på b är hälften av värdet på a . Således förhåller sig $a:b:c$ till varandra som 4:2:1. Eftersom summan ska vara 1, är således $a = 4/7$, $b = 2/7$ och $c = 1/7$.

B2.2 Geometriskt medelvärde Svar: $\sqrt{2}$.

Motivering: Som vi ser av formeln kan den förenklas till $(a_n/a_0)^{1/n}$. Givet är $a_0 = 10000$ och $a_4 = 2,5 \cdot 16\,000 = 40\,000$. Således beräknar vi $(40\,000/10\,000)^{1/4} = 4^{1/4} = \sqrt{2}$.

B2.3 Glidande medelvärde I Svar: Det sista alternativet.

B2.4 Glidande medelvärde II Svar: Det andra alternativet.