

Urvalsprov A 2025

Lösningar

Den fördjupade differentierade delen i matematik

C1 Uppgift i fördjupad matematik

C1.1 Svaret är 3 486 784 400.

Motivering: Gemensamma kvoten för den geometriska summan är kvoten av två på varandra följande termer:

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$. Summan kan beräknas med formeln:

$$S_{20} = a_1 \frac{1 - q^{20}}{1 - q} = 2 \cdot \frac{1 - 3^{20}}{1 - 3} = 3^{20} - 1 = 3\,486\,784\,400.$$

C1.2 Svaret är $2\bar{j} = -2\bar{i} + 2(\bar{i} + \bar{j})$.

Motivering: Ur komponentrepresentationen $2\bar{j} = x\bar{i} + y(\bar{i} + \bar{j}) = (x + y)\bar{i} + y\bar{j}$, fås ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ y &= 2. \end{cases}$$

Systemets lösningar är $(x, y) = (-2, 2)$.

C1.3 Svar: Största värdet är 21 och minsta värdet är -11 .

Motivering: Derivatfunktionen $f'(x) = 3x^2 - 12$ har nollställen då $3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Funktionens extremvärden finns antingen i derivatans nollställen eller i intervallets ändpunkter. Eftersom $f(-3) = 14$, $f(-2) = 21$, $f(2) = -11$ och $f(4) = 21$, är det sökta minimivärdet -11 och maximivärdet 21.

C2 Uppgift i fördjupad matematik

C2.1 Svaret är $3 \ln 21 \approx 9$.

Motivering:

$$\begin{aligned} 21(1 - e^{-t/3}) = 20 &\Leftrightarrow 1 - e^{-t/3} = \frac{20}{21} \Leftrightarrow e^{-t/3} = \frac{1}{21} \Leftrightarrow -t/3 = \ln \frac{1}{21} \\ &\Leftrightarrow t = -3 \ln \frac{1}{21} = 3 \ln 21 \approx 9. \end{aligned}$$

C2.2 Svaret är $7e^{-10/3}$ ($\approx 0,25$).

Motivering: $T'(t) = 21(-e^{-t/3}(-\frac{1}{3})) = 7e^{-t/3}$, vilket ger $T'(10) = 7e^{-10/3} \approx 0,25$.

C2.3 Svaret är $14 + 7e^{-3}$ (≈ 14).

Motivering:

$$\frac{1}{9} \int_0^9 21(1 - e^{-t/3}) dt = \frac{7}{3} \Big/_{0}^9 (t + 3e^{-t/3}) = \frac{7}{3}(9 + 3e^{-3} - 3) = 14 + 7e^{-3} \approx 14.$$